不確実下の非線形効用関数としてのChoquet-Stieltjes積分 (不確実性科学と意思決定の数理と応用)

成川, 康男

数理解析研究所講究録 1457 巻 2005 年 115-122

不確実下の非線形効用関数としての Choquet-Stieltjes 積分

成川康男 (Yasuo Narukawa) , Vicenç Torra,
Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial
CSIC, Bellaterra; Catalonia, Spain

1 はじめに

Choquet[3] は、ポテンシャル論の枠組みの中で、非加法的集合関数である容量を研究し、その定義域を連続関数にまで拡張した汎関数を考察した。これを一般的な非加法的集合関数に関する積分と捉えたのは、Schmeidler[16] や室伏ら [7] である。以来、意思決定の分野で非加法的集合関数に関する Choquet 積分は、非線形効用理論 [6, 14, 17] において中心的な役割を果たしている。

本論文では、Choquet 積分を拡張した Choquet Stieltjes 積分を新たに定義し、その基本的性質を述べる。また、Choquet Stieltjes 積分によって Torra [19] による Twofold 積分が一般的に定義されることをみる。

2 準備

2.1 非加法的測度と Choquet 積分

ここでは, 非加法的測度と Choquet 積分に関する基本的定義と性質を紹介する。ここで S は全体集合とし, $\mathcal{S}$ は S の σ-代数 とする。すなわち, $(S,\mathcal{S})$ は可測空間である。

非加法的集合関数はその研究分野により様々な名前で呼ばれてきた。たとえば, ファジィ測度 [18], 協力ゲーム, 容量, 非加法的主観確率 [16] などである。ここでは, Denneberg [4] のモノグラフに従い, 非加法的測度と呼ぶことにする。

定義 2.1. $(S,\mathcal{S})$ を可測空間とする。非加法的測度 μ とは実数値集合関数 $\mu:\mathcal{S}\longrightarrow R_+$ で以下の条件を満たすものである。

$\mu(\emptyset)=0$, $A\subset B$, $A,B\in\mathcal{S}$ であるとき $\mu(A)\le\mu(B)$.

$\mathcal{F}(S)$ を非負値可測関数の集合とする。すなわち,

$$\mathcal{F}(S) = \{f | f : S \to R_+, f : \text{可測}\}$$

である。以下に $\mathcal{F}(S)$ 上の汎関数である Choquet 積分を定義しよう。

定義 2.2. [3, 7] μ を $(S, \mathcal{S})$ 上の非加法的測度とする。$f \in \mathcal{F}(S)$ の μ に関する Choquet 積分は以下の式で定義される。

$$C_\mu(f) := \int_0^\infty \mu_f(r) dr,$$

ここで, $\mu_f(r)$ は分布関数 $\mu_f(r) = \mu(\{x | f(x) > r\})$ である。

S が有限の時, すなわち $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ と仮定できるとき i 番目の順序統計量 $x^{(i)}$ [20] とは R^n 上の汎関数で要素 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$ を小さいものから順に並べたものとして定義される。すなわち,

$$x^{(1)} \leq \cdots \leq x^{(i)} \leq \cdots \leq x^{(n)}$$

である。これを使うと, Choquet 積分は $x^{(0)} := 0$ として

$$C_\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} (x^{(i)} - x^{(i-1)}) \mu(\{(i), \ldots, (n)\})$$

と書ける。

2.2 不確実性下およびリスク下における意思決定

意思決定問題は以下のように定式化していくことができる。全体集合 S は状態の集合, すなわち, 起こりうる可能性全体の集合とする。また, 集合 X は結果の集合とし, たとえば, これは金銭で計るとして, これは実数の部分集合であるとする。S から X への関数 f の集合を $\mathcal{F}$ とおき, これを行為の集合という。S から X への関数 f の集合を $\mathcal{F}$ とおき, これを行為の集合という。また, この行為の集合上に弱順序である選好関係 $\prec$ が入っているものとする。不確実性下における意思決定問題とは,S 上に客観的な確率が与えられていないような決定問題をいい, 4 項組 $(S, X, \mathcal{F}, \prec)$ を不確実性下における意思決定問題の枠という。一方リスク下における意思決定問題とは,S 上に客観的な確率 P が与えられてる決定問題をいい行為の集合 $\mathcal{F}$ は確率変数であり, 5 項組 $(S, X, P, \mathcal{F}, \prec)$ をリスク下における意思決定問題の枠という。

D.Bernoulli は期待値は金額そのものについて求めるられるべきではなく, 金銭のもつ主観的な価値について期待値が求められるべきであると主張

した。これが期待効用理論である。すなわち, 結果の集合 X から実数の集合 R への関数 u を考え, 確率変数 $u(f(x))$ の期待値を考えるのである。この関数を X 上の効用関数といい, 期待値 $E_P(u(f))$ を期待効用 (Expected utility) という。

リスク下における意思決定の選好が期待効用で表現されるための公理系は von Neumann-Morgenstern [12] によって作り上げられた。

その後、期待効用では説明のつかない反例が、リスク下については Allais [1] に、不確実下においては、Ellsberg[5] により示され、これらのパラドックスを解決するために Choquet 積分を用いたモデルが提唱されてきた。

定義 2.3. [17] 不確実性下における枠を考える。Choquet 期待効用モデル (CEU) とは行為を変換する連続で単調増加な効用関数 $u : R \to R$ と非加法的測度 μ があって, 行為 f の選好が以下で定義される $C_{u,\mu}$ で表されるものをいう。

$$C_{u,\mu}(f) := C_\mu(u(f)),$$

すなわち

$$f \prec g \Leftrightarrow C_{u,\mu}(f) < C_{u,\mu}(g)$$

である。

つぎに, リスク下における Quiggin[14] によるランク依存型期待効用を以下に定義しよう。

定義 2.4. リスク下における意思決定問題の枠を考える。意思決定者がランク依存型期待効用モデル (RDEU) に従うとは意思決定者の選好 $\prec$ に対して連続で単調な効用関数 u と確率歪化関数 $w : [0,1] \to [0,1]$ が存在し $J(h) := C_{w\circ P}(u(h))$ とおくと

$$f \succ g \Leftrightarrow J(f) > J(g)$$

とできることをいう。ここで, 確率歪化関数とは, 連続かつ狭義単調増加関数で $w(0) = 0, w(1) = 1$ を満たすものをいう。

3 Choquet Stieltjes 積分

この章では Choquet-Stieltjes 積分を定義し,Choquet-Stieltjes 積分がある条件の下で通常の Choquet 積分で表現が可能であることを示す. この定理の応用として CEU と RDEU が Chateauneuf [2] によるそれらの単純化と同じであるための必要十分条件を示す。

定義 3.1. [8] $(S, \mathcal{S})$ を可測空間とし,μ をその上の非加法的測度, $\varphi : R_+ \to R_+$ は非減少関数とする。このとき, 以下の式で Lebesgue-Stieltjes 測度 ν_φ [15] を定義することができる。

$$\nu_\varphi((a, b]) := \varphi(b+0) - \varphi(a+0)$$

このとき μ に関する Choquet-Stieltles 積分 $CS_{\mu,\varphi}(f)$ を

$$CS_{\mu,\varphi}(f) := \int_0^\infty \mu_f(r) d\nu_\varphi(r),$$

で定義する。ここで $\mu_f(r) = \mu(\{x | f(x) > r\})$. とする。

もしも, 全空間が $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ であるとき, i 番目の順序統計量を使って Choquet-Stieltjes 積分は以下の形にかける。

$$\begin{aligned} CS_{\mu,\varphi}(f) &= \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x^{(i)}) - \varphi(x^{(i-1)}) \mu(\{(i), \ldots, (n)\}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(x^{(i)})(\mu(\{(i), \ldots, (n)\}) - \mu(\{(i+1), \ldots, (n)\}) + \varphi(x^{(n)}) \mu(\{(n)\}). \end{aligned}$$

ここで, φ が単調増加であるとすると,

$$\{x | f(x) > \varphi^{-1}(\alpha)\} = \{x | \varphi(f(x)) > \alpha\}$$

であるから, 以下の命題が成り立つ。

命題 3.2. μ は可測空間 $(S, \mathcal{S})$ 上の非加法的測度とし, $\varphi : R_+ \to R_+$ は狭義単調増加であるとする。$\varphi(f)$ の *Choquet* 積分は,f の μ に関する *Choquet-Stjielties* 積分で表される。すなわち,

$$C_\mu(\varphi(f)) = CS_{\mu,\varphi}(f)$$

が成り立つ。

命題 3.3. μ は可測空間 $(S, \mathcal{S})$ 上の非加法的測度とし, $\varphi : R_+ \to R_+$ は $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ を満たすとする。このとき、共単調な $f, g \in \mathcal{F}$ に対して、

$$CS_{\mu,\varphi}(f+g) \leq CS_{\mu,\varphi}(f) + CS_{\mu,\varphi}(g)$$

が成り立つ。

定理 3.4. $(S, \mathcal{S})$ を可測空間として μ を非加法的測度とする。

このとき、非加法的測度 $\nu_{\mu,\varphi}$ が存在し

$$CS_{\mu,\varphi}(f) = C_{\nu_{\mu,\varphi}}(f),$$

が成り立つ、すなわち, Choquet-Stieltjes 積分が Choquet 積分で表されるための必要十分条件は関数 $\varphi : R_+ \to R_+$ が線形であることである。

CEU(または RDEU) において効用関数 $u : R \to R$ が恒等写像すなわち $u(x) = x$ であるとき, CEU(または RDEU) の単純化という。CEU(または RDEU) がその単純化と本質的に等しい φ が線形であるときで、またそのときに限ることを示している。

4 Generalized Twofold 積分

ここでは、前章の Choquet Stieltjes 積分で、関数 φ が被積分関数 f に依存して変わるような汎関数 $GT : \mathcal{F} \to R$ を考える. すなわち、$\varphi := \varphi_f$ として、$GT(f) = CS_{\mu,\varphi_f}(f)$ である。このタイプの汎関数として、Twofold 積分 [9, 10, 19] がある。

$(S, \mathcal{S})$ を可測空間として μ_C, μ_S を $(S, \mathcal{S})$ 上の非加法的測度とする。まず、非減少関数 $\phi_f : [0,1] \to [0,1]$ を

$$\phi_f(x) := \bigvee_{0 \le r \le x} (r \wedge \mu_S(\{f > r\})).$$

で定義する。特に、$\phi_f(1)$ は菅野積分と呼ばれ以下これを $S_{\mu_S}(f)$ とかく。ここで、実軸上の Lebesgue-Stjeltjes 測度 ν_{ϕ_f} を

$$\nu_{\phi_f}((a,b)) := \phi_f(b-0) - \phi_f(a+0).$$

で定義する。

定義 4.1. μ_C と μ_S を $(S, \mathcal{S})$ 上の非加法的測度 とする。可測関数 $f : S \to [0,1]$ の非加法的測度 μ_S , μ_C に関する *Twofold* 積分 $TI_{\mu_S,\mu_C}(f)$ は

$$TI_{\mu_S,\mu_C}(f) = \int_0^1 \mu_C(f > a) d\nu_{\phi_f}(a).$$

で定義される。

Twofold 積分は以下のように Choquet 積分や菅野積分を特別な例として含む。

命題 4.2. ν は $(S, \mathcal{S})$ 上の非加法的測度で $\nu(A) = 1$ *if* $A \neq \emptyset$. を満たすものとする。このとき、

1. $TI_{\mu_S,\nu}(f) = S_{\mu_S}(f)$
2. $TI_{\nu,\mu_C}(f) = C_{\mu_C}(f)$

Choquet integral の単調収束定理 [4] や菅野積分の単調収束定理 [13] により、以下の単調収束定理が成り立つ。

定理 4.3. μ_S と μ_C は下から連続な $(S, \mathcal{S})$ 上の非加法的測度とすると、可測関数 $f_n, f : X \to [0,1]$ に対して $f_n \uparrow f$ ならば $TI_{\mu_S,\mu_C}(f_n) \uparrow TI_{\mu_S,\mu_C}(f)$ が成り立つ。

Twofold 積分は以下のように図示される。

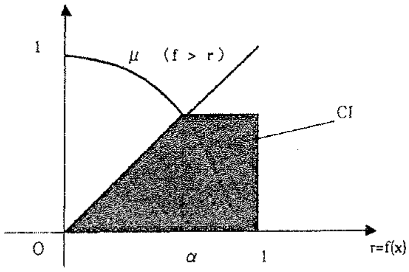

図 1: Graphical representation of the Continuous twofold integral

さて、この Twofold 積分と同じようにして Choquet 積分を 2 度使うことで、Twofold Choquet 積分 (TC) を定義することができる。

μ_1, μ_2 を　可測空間 $(S, \mathcal{S})$ 上の非加法的測度とする。まず、非減少関数 $\varphi_f : R_+ \to R_+$ を

$$\varphi_f(x) := \int_0^x \mu_1(\{f > r\}))dr.$$

で定義する。ここで、実軸上の Lebesgue-Stjeltjes 測度 ν_{φ_f} を

$$\nu_{\varphi_f}((a,b)) := \varphi_f(b-0) - \varphi_f(a+0).$$

で定義する。

定義 4.4. μ_1 と μ_2 を $(S, \mathcal{S})$ 上の非加法的測度 とする。可測関数 $f : S \to R_+$ の非加法的測度 μ_1 , μ_2 に関する *Twofold Choquet* 積分 $TC_{\mu_1,\mu_2}(f)$ は

$$TC_{\mu_1,\mu_2}(f) = \int_0^\infty \mu_2(f > a)d\nu_{\varphi_f}(a).$$

で定義される。

もしも, 全空間が $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ であるとき, i 番目の順序統計量を使って $TC_{\mu_1,\mu_2}(f) = \sum_{i=1}^n (\varphi_f(x^{(i)}) - \varphi_f(x^{(i-1)})\mu_2(\{(i), \ldots, (n)\})$ となり $\varphi_f(x^{(i)}) - \varphi_f(x^{(i-1)}) = (x_i - x_{i-1})\mu_1(\{(i), \ldots, (n)\})$ より、$TC_{\mu_1,\mu_2}(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\mu_1(\{(i), \ldots, (n)\})\mu_2(\{(i), \ldots, (n)\})$ となり、$TC_{\mu_1,\mu_2}(f) = C_{\mu_1\mu_2}(f)$ となる。このことから、以下の定理が得られる。

定理 4.5. μ を $(S,\mathcal{S})$ 上の非加法的測度 とする。μ が 2 つの非加法的測度 μ_1 と μ_2 の積であるとき、可測関数 $f : S \to [0,1]$ の非加法的測度 μ に関する *Choquet* 積分 $C_\mu(f)$ は μ_1,μ_2 に関する *Twofold Choquet* 積分 $TC_{\mu_1,\mu_2}(f)$ 　に等しい。すなわち、

$$C_\mu(f) = TC_{\mu_1,\mu_2}(f).$$

$\mu := \mu_1\mu_2$ と新たな非加法的測度 μ_3 によって Twofold Choquet 積分 TC_{μ,μ_3} を定義できる。これを繰り返すことによって n 個の非加法的測度に関する n-fold Choquet 積分が定義できこれは n 個の非加法的測度の積に関する Choquet 積分に等しい。

S を有限集合とすると、$(S,\mathcal{S})$ 上の有限値を取る非加法的測度 μ に対して、確率 P と多項式 f が存在して $\mu = f \circ P$ とかける [11]。このことより任意の非加法的測度 μ に関する Choquet 積分は確率 P に関する n-fold 積分の一次結合で表せることになる。

参考文献

[1] M. Allais, Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine, *Econometrica* 21, (1953), 503-546.

[2] A. Chateauneuf, Modeling attitudes towards uncertainty and risk through the use of Choquet integral, *Annals of Operation Research,* 52, (1994), 3-20.

[3] G.Choquet . Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble.* 5, (1955), 131-295.

[4] D. Denneberg, *Non additive measure and Integral,* Kluwer Academic Publishers, Dordorecht,1994.

[5] D. Ellsberg, Risk ambiguity and the Savage axioms, *Quarterly Journal of Economics,* 75 (1961) 643-669.

[6] P. C. Fishburn, Nonlinear preference and utility theory, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1988.

[7] T. Murofushi and M. Sugeno, An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure, *Fuzzy Sets and Systems,* 29 , (1989), 201-227.

[8] Y. Narukawa and T. Murofushi, Decisions under risk and uncertainty through the use of Choquet integral, Proc. 4th International Symposium on Advanced Intelligent Systems (ISIS 2003) (2003) 555-558.

[9] Y. Narukawa, V. Torra, Twofold integral and Multi-step Choquet integral, Kybernetika, 40:1 (2004) 39-50.

[10] Y. Narukawa, V. Torra, Twofold integral: a graphical interpretation and its generalization to universal sets, Proc. EUSFLAT 2003 (ISBN 3-9808089-4-7), Zittau, Germany, 718-722.

[11] Y. Narukawa, V. Torra, Fuzzy measure and probability distributions: distorted probabilities, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, to appear.

[12] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, Princeton, 1944.

[13] E. Pap,*Null-Additive set functions,* Kluwer Academic Publishers, Dordorecht,1995.

[14] J. Quiggin, A Theory of Anticipated Utility, *Journal of Economic Behavior and Organization,* 3, 1982, pp 323-343.

[15] F. Riesz, & B. Nagy, *Functional analysis,* Frederick Unger Publishing, New York, 1955.

[16] D. Schmeidler, Integral representation without additivity, *Proceedings of the American Mathematical Society,* 97 , (1986), 253-261.

[17] D. Schmeidler, Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica,* 57, (1989), 517-587.

[18] M. Sugeno, *Theory of fuzzy integrals and its applications,* Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology, (1974).

[19] V. Torra, Twofold integral: A Choquet integral and Sugeno integral generalization, Butlletí de l'Associació Catalana d'Intel · ligència Artificial, **29** (2003) 13-19 (in Catalan). Preliminary version: IIIA Research Report TR-2003-08 (in English).

[20] B. L. van der Waerden, *Mathematical statistics,* Springer, Berlin, 1969.